ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
2018-2019 УЧЕБНЫЙ ГОД

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

10 КЛАСС

Общее количество баллов **35. Решение каждой задачи оценивается Жюри из7 баллов** в соответствии с критериями и методикой оценки, разработанной центральной предметно-методической комиссией:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения.
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3-4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию отдельных задач содержатся в комментариях к решениям.

1. Квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$ имеет два различных ненулевых целых корня a и b. Известно, что $a + p$ делится на $q - 2b$. Чему может быть равен корень a? (Приведите все ответы и докажите, что других нет.)

Ответ. $a = 3$ или $a = 1$.

Решение. По теореме Виета $p = -a - b$, $q = ab$. Тогда по условию число $a + p = a + (-a - b) = -b$ делится на $q - 2b = ab - 2b = (a - 2)b$. При $a = 2$ последнее число равно нулю и говорить о делимости некорректно, при $a = 3$ или $a = 1$ делимость имеет место, при остальных целых значениях a делимость не возможна, поскольку делитель по модулю окажется больше делимого. Заметим, что оба найденных ответа подходят, например, для трехчлена $x^2 - 4x + 3$.

Комментарий. *Записана теорема Виета и задача сведена к делимости (-b) на (a-2)b – 4 балла. Доказано, что только при двух значениях a делимость имеет место – 3 балла. Баллы суммируются.*

2. Существуют ли натуральные числа x и y такие, что НОД$(x; y)$ + НОК$(x; y) + x + y = 2019$?

Ответ. Не существуют.

Решение. Проанализируем уравнение с точки зрения чётности. Если оба числа xи yучётные, то их НОД и НОК также чётные, и сумма четырёх слагаемых (чётных чисел) тоже должна быть чётной. Если они оба нечётные, то их НОД и НОК нечётные, а сумма четырех нечётных – чётная. Наконец, если одно из чисел x, y чётное, а второе нет, то НОД нечётен, а НОК – чётное, сумма также чётная. Таким образом, нужных чисел x и y не существует.

Комментарий. *Ответ без обоснования – 0 баллов. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи – 1-2 балла.*

3. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны AD в точке K. Найдите площадь трапеции, если $AK = 16$, $DK = 4$ и $CD = 6$.

Ответ. 432.

Решение. Пусть L, M, N – точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AB, CD соответственно; пусть I – центр вписанной окружности. Радиус окружности обозначим через r. Сразу отметим, что $DN = DK = 4$ (первое равенство из равенства отрезков касательных), откуда $CL = CN = CD - DN = 2$ (из равенства отрезков касательных, второе очевидно). Поскольку I является точкой пересечения биссектрис внутренних углов трапеции, то $\angle IAD + \angle IDA = \frac{\angle DAB + \angle DAC}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$, где предпоследнее равенство следует из параллельности прямых AB и CD. Следовательно, треугольник AID прямоугольный и $\angle AID = 90^\circ$. Аналогично, прямоугольным является и треугольник BIC. Далее, поскольку IK и IL являются радиусами, проведёнными к точкам касания, то $\angle IKD = 90^\circ$ и $\angle ILB = 90^\circ$. Следовательно, IK и IL – высоты в треугольниках AID и BIC соответственно.

Воспользуемся известным фактом, что в прямоугольном треугольнике квадрат высоты, опущенной на гипотенузу, равняется произведению отрезков, на которые она делит гипотенузу. Тогда $IK^2 = AK \cdot KD = 16 \cdot 4 = 64 = 8^2$, т.е. $r = IK = 8$, а также $8^2 = IL^2 = CL \cdot LB = 2 \cdot LB$, т.е. $LB = 32$. Теперь у нас есть всё для нахождения площади. Заметим, что MN является высотой трапеции и $MN = 2r = 16$, $AB + CD = (AM + MB) + 6 = (AK + BL) + 6 = 16 + 32 + 6 = 54$, откуда ответ $\frac{16 \cdot 54}{2} = 432$.

Комментарий. *Приведено полное обоснованное решение – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – до 5 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1-2 балла.*

4. Назовём натуральное число «замечательным», если в нем все цифры различные, оно не начинается с цифры 2 и при вычеркивании некоторого числа его цифр можно получить число 2018. Сколько существует различных семизначных «замечательных» чисел?

Ответ. 1800.

Решение. Для правильного счёта вариантов, необходимо соблюдать правило: перед цифрой 2 должна быть одна из шести цифр – 3, 4, 5, 6, 7 или 9. Пусть для определенности – это 3, тогда две различные цифры из оставшихся пяти ($\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ вариантов) могут находиться в местах, отмеченных точками: ..32..0..1..8.., т.е. либо оба числа находятся в одном промежутке $5 \cdot 2 = 10$ способов, либо – в разных, тогда $\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 2 = 20$ способов. Поэтому всего различных вариантов равно $10 \cdot 30 = 300$. Аналогично вычисляются варианты для пар 42, 52, 62, 72 и 92, т.е. окончательно получаем: $6 \cdot 300 = 1800$ вариантов.

Комментарий. *За вычислительную ошибку при верных рассуждениях снижать на 1 балл. За потенциально полезные, но не реализованные идеи – 1-2 балла.*

5. Лена скачала новую игру для своего смартфона, где разрешается проводить алхимические реакции двух типов. Если она соединит один элемент «огонь» и один элемент «камень», получится один элемент «металл». А если соединит один элемент «металл» и один элемент «камень», то получится три элемента «камень». У Лены имеется 50 элементов «огонь» и 50 элементов «камень». Для приготовления элемента X необходимо взять один элемент «металл», два элемента «огонь» и три элемента «камень». Какое наибольшее число элементов X сможет получить Лена?

Ответ. 14 элементов.

Решение. Рассмотрим выражение $S = 2x + y + z$, где x – число элементов «металл», y – число элементов «огонь», z – число элементов «камень». Легко видеть, что это выражение при каждой из двух алхимических операций не меняется:

$$2(x+1) + y - 1 + z - 1 = 2x + y + z.$$
$$2(x-1) + y + z - 1 + 3 = 2x + y + z;$$

Изначально $S = 100$. Для получения t элементов X требуется t элементов «металл», $2t$ элементов «огонь» и $3t$ элементов «камень», тогда $S = 7t \leq 100$. Значит, t не превосходит 14. Четырнадцать элементов X получить можно: соединяя 21 элемент «огонь» и 21 элемент «камень», получим 21 элемент «металл», 29 элементов «огонь» и 29 элементов «камень». Затем, соединяя 7 элементов «металл» и 7 элементов «камень», получаем 14 элементов «металл», 29 элементов «огонь» и 43 элемента «камень». Этого хватит для приготовления 14 элементов X.

Комментарий. *Предложена реализация – 3 балла, сделана оценка – 4 балла, баллы суммируются. При отсутствии решения за потенциально полезные идеи и подходы – 2-3 балла. Ответ без обоснования – 0 баллов.*